Sistema en no-equilibrio

Juan José Gómez Navarro

13 de junio de 2005

1. Introducción.

Vamos a estudiar el comportamiento de un sistema cuando es perturbado y sacado fuera del equilibrio por una perturbación de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Además utilizaremos la hipótesis

$$\langle \delta A(t) \delta A(0) \rangle = \langle \delta A(0)^2 \rangle e^{-t/\tau}$$

2. Obtención de $\overline{\Delta A(t)}$

Utilizamos la expresión para $\overline{\Delta A(t)}$, consecuencia de considerar respuesta lineal:

$$\overline{\Delta A(t)} = \int_{\infty}^{\infty} dt' \; \chi(t-t') f(t'),$$

donde

$$\chi(t-t') = -\beta \frac{d}{dt} \langle \delta A(t) \delta A(t') \rangle.$$

Tomando $t' = 0$ e introduciendo nuestra hipótesis para la correlación

$$\chi(t) = \beta \langle \delta A(0)^2 \rangle \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Esta relación sólo es válida para $t > 0$, puesto que hemos tomado $t' = 0$. Cuando $t < 0$, χ es simplemete 0 respetando la causalidad. De esta manera, debemos tener en cuenta que ambos t_1 y t_2 son también son positivos. Por tanto, la expresión para $\overline{\Delta A(t)}$ es

$$\overline{\Delta A(t)} = \int_{\infty}^{t} dt' \; \frac{\beta \langle \delta A(0)^2 \rangle}{\tau} f(t') e^{-(t-t')/\tau}$$

. Esta integral, la separamos en tres zonas

- $t < t_1$
  en este caso f es nula en todo el intervalo de integración, por tanto

$$\overline{\Delta A(t)} = 0$$

- $t_1 < t < t_2$
  en este caso, la integral es no nula en el intervalo $t_1 < t' < t$ por tanto
$$\overline{\Delta A(t)} = \beta\langle\delta A(0)^2\rangle[1 - e^{-(t-t_1)/\tau}]$$

- $t > t_2$
  en este caso la integral es no nula en todo el intervalo y por tanto tenemos
$$\overline{\Delta A(t)} = \beta\langle\delta A(0)^2\rangle[e^{-(t-t_2)/\tau} - e^{-(t-t_1)/\tau}]$$

Resumiento, la variación del equilibrio viene dada por

$$\overline{\Delta A(t)} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t < t_1 \\ \beta\langle\delta A(0)^2\rangle[1 - e^{-(t-t_1)/\tau}] \quad \text{si} \quad t_1 < t < t_2 \\ \beta\langle\delta A(0)^2\rangle[e^{-(t-t_2)/\tau} - e^{-(t-t_1)/\tau}] \quad \text{si} \quad t_2 < t \end{cases}$$

3. Energía disipada en la perturbación

La energía disipada viene dada por la expresión

$$E_{dis} = -\int_0^\infty dt\ \dot{f}(t)A(t)$$

pero como $f(t)$ es un par de escalones, la derivada es la delta de dirac:

$$\dot{f}(t) = \delta(t - t_1) - \delta(t - t_2).$$

Por tanto, la energía disipada es simplemente

$$E_{dis} = A(t_2) - A(t_1).$$

Para relacionarla con el dato que tenemos del problema anterior, tenemos que recordar que

$$A(t) = \overline{\Delta A(t)} + \langle A\rangle,$$

pero $\langle A\rangle$ es una propiedad del equilibrio, que no depende del tiempo. De esta manera

$$E_{dis} = \overline{\Delta A(t_2)} - \overline{\Delta A(t_1)} = \beta\langle\delta A(0)^2\rangle\left(1 - e^{-(t_2-t_1)/\tau}\right)$$

En el caso $t_2 - t_1 \ll \tau$ podemos desarrollar la exponencial:

$$E_{dis} = \beta\langle\delta A(0)^2\frac{t_2 - t_1}{\tau}$$

mientras que en el caso $t_2 - t_1 \gg \tau$ la exponencial tiende a 0 y nos queda

$$E_{dis} = \beta\langle\delta A(0)^2\rangle$$