

Probabilidad de regreso al origen del caminante aleatorio en 1,2 y 3 dimensiones

Juan José Gómez Navarro

9 de junio de 2005

1. Cálculo de p_l en dos dimensiones.

p_l se define como la probabilidad de que un caminante aleatorio, partiendo del origen regrese a éste exactamente en l pasos. Del estudio detallado del caminante aleatorio hecho en clase, obtuvimos que el número de caminos posibles cerrados con l pasos es

$$n_l = \frac{2^l}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\cos \frac{2\pi}{L} i + \cos \frac{2\pi}{L} j \right)^l,$$

de manera que la probabilidad p_l será el cociente entra casos favorables y posibles:

$$p_l = \frac{n_l}{\gamma^l}$$

donde el denominador es el número de caminos totales posibles con l pasos, γ es el número de coordinación de la red, que tomaremos 4 para la red cuadrada.

Si estamos interesados en redes muy grandes $L \gg 1$, podemos substituir los sumatorios por integrales, ya que en este caso es legítimo el cambio

$$\begin{cases} \frac{2\pi i}{L} \longrightarrow \theta_i & (\theta_i \in [0, 2\pi]) \\ \sum_i \longrightarrow \frac{L}{2\pi} \int d\theta \end{cases}$$

De esta manera, la expresión aproximada para la probabilidad es

$$p_l = \frac{2^l L^2}{(2\pi)^2 L^2 4^l} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_i d\theta_j (\cos \theta_i + \cos \theta_j)^l = \frac{1}{(2\pi)^2 2^l} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_i d\theta_j (\cos \theta_i + \cos \theta_j)^l$$

Esta expresión puede ser reescrita fácilmente como:

$$p_l = 2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \int_{\pi}^{-\pi} d\theta_i d\theta_j \left(\frac{\cos \theta_i + \cos \theta_j}{2} \right)^l$$

donde he usado la paridad de la función coseno. sta expresión todavía es difícil de calcular, pero podemos aproximarla para un número de pasos l muy grande. En este caso, $\left(\frac{\cos \theta_i + \cos \theta_j}{2} \right)^l$ es prácticamente nulo salvo cuando θ_i y θ_j son muy próximos a cero. De esta manera podemos desarrollar en torno al cero:

$$p_l = 2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \int_{\pi}^{-\pi} d\theta_i d\theta_j e^{l \log\left(\frac{\cos \theta_i + \cos \theta_j}{2}\right)}$$

pero recordando los desarrollos del coseno y del logaritmo:

$$\cos x = 1 - x^2/2 \quad , \quad \log(1 - x) = -x \quad \text{si } x \text{ pequeño}$$

aplicados a nuestro problema dan:

$$\log\left(\frac{\cos \theta_i + \cos \theta_j}{2}\right) = \frac{\theta_i^2 + \theta_j^2}{4}$$

Y sustituyendo en la ecuación de p_l tenemos

$$p_l = 2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \int_{\pi}^{-\pi} d\theta_i d\theta_j e^{\frac{l}{4}(\theta_i^2 + \theta_j^2)}$$

Puesto que la función exponencial decae rápidamente, podemos extender los límites de la integral hasta el infinito, lo que no supone un error excesivo y de esa manera podemos calcular la integral, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\alpha(x^2 + y^2)} = \frac{\pi}{\alpha}$$

De esta manera encontramos para dos dimensiones:

$$\boxed{p_l = \frac{2}{l\pi}}$$

2. Cálculo de p_l en una dimensión.

La generalización del problema es trivial, la única diferencia es que las integrales cambian, pero las expresiones son totalmente equivalentes. p_l en una dimensión viene dado por

$$p_l = \frac{2^l}{2^l L} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\cos \frac{2\pi}{L} i\right)^l$$

donde hay que tener en cuenta que ahora el número de coordinación de la red es dos: $\gamma = 2$. Si como antes, estamos interesados en el caso $L \gg 1$ son queda una integral que nuevamente podemos convertir en gaussiana utilizando el desarrollo del coseno y el logaritmo:

$$p_l = \frac{2L}{2\pi L} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta e^{l \log \cos \theta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta e^{-l\theta^2/2}$$

la integral es fácil, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Por tanto,

$$\boxed{p_l = \sqrt{\frac{2}{l\pi}}}$$

3. Cálculo de p_l en tres dimensiones.

La expresión genral sin aproximaciones es trivialmente generalizable:

$$p_l = \frac{2^l}{6^l L^3} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{L-1} \left(\cos \frac{2\pi}{L} i + \cos \frac{2\pi}{L} j + \cos \frac{2\pi}{L} k \right)^l,$$

donde ahora $\gamma = 3$. Tomando $L \gg 1$ llegamos como antes a

$$p_l = \frac{1}{3^l (2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_i d\theta_j d\theta_k (\cos \theta_i + \cos \theta_j + \cos \theta_k)^l$$

Realizando la aproximación gaussiana de antes:

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_i d\theta_j d\theta_k e^{l \log \left(\frac{\cos \theta_i + \cos \theta_j + \cos \theta_k}{3} \right)} = \\ &= 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_i d\theta_j d\theta_k e^{-l/6(\theta_i^2 + \theta_j^2 + \theta_k^2)} \end{aligned}$$

Ahora integramos en esféricas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz e^{-l/6(x^2 + y^2 + z^2)} = \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \rho^2 \sin \theta e^{-l\rho^2} = 4\pi \frac{6}{2l} \sqrt{\frac{\pi}{l}}$$

De esta manera

$$p_l = 4\pi \frac{6}{2l} \sqrt{\frac{\pi}{l}} \frac{2}{(2\pi)^3} = \frac{3}{(l\pi)^{3/2}}$$

4. Cálculo de P_l en una dimensión.

Definimos P_l como la probabilidad de que alguna vez al menos se haya pasado por el origen pasados l pasos del caminante aleatorio. Se trata de una probabilidad acumulada. Según la definición, se obtiene la ley de recurrencia:

$$P_{l+1} = P_l + (1 - p_l)p_{l+1}.$$

Estamos interesados en el comportamiento cuando $l \gg 1$, de manera que $P_{l+1} \sim P_l$ y por tanto podemos sustituir la ecuación anterior por una ecuación diferencial

$$\frac{dP_l}{dl} = (1 - P_l)p_l$$

con las condiciones iniciales $P(l_0) = P_0$. La ecuación es integrable directamente y resulta:

$$\int_{l_0}^l p_l dl = \int_{P_0}^{P_l} \frac{dP_l}{1 - P_l} = -\log \frac{1 - P_l}{1 - P_0}.$$

En el caso unidimensional tenemos explícitamente

$$\int_{l_0}^l p_l dl = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{l_0}^l l^{-1/2} dl = A(\sqrt{l} + \sqrt{l_0}).$$

Sólo nos interesa la dependencia de P_l con l , ya que con tanta aproximación, no podemos esperar obtener más que el orden de magnitud, no el valor exacto. Sustituyendo esta expresión en la solución de la ecuación diferencial obtenemos:

$$-\log \frac{1 - P_l}{1 - P_0} = A(\sqrt{l} + \sqrt{l_0}) \Rightarrow 1 - P_l = (1 - P_0)e^{A(\sqrt{l} + \sqrt{l_0})}.$$

Lo importante en cuanto a esta expresión es que nos dice que cuando el número de pasos es grande, la probabilidad de que el caminante regrese al origen tiende a uno. Esto significa que en una dimensión, el caminante SIEMPRE vuelve al origen.

5. Cálculo de P_l en dos dimensiones.

Lo único que cambia en este caso es la expresión para p_l . Como antes, nos olvidamos de constantes y buscamos el comportamiento cualitativo. De esta forma

$$\int_{l_0}^l p_l dl = \frac{2}{\pi} \int_{l_0}^l l^{-1} dl = B \log \frac{l}{l_0},$$

y la ecuación resultante es

$$-\log \frac{1 - P_l}{1 - P_0} = B \log \frac{l}{l_0} \Rightarrow 1 - P_l = (1 - P_0)(l_0/l)^B.$$

Nuevamente vemos que esta fórmula nos dice que con un número suficiente de pasos, $P_l \rightarrow 1$ ya que B es una constante positiva y por tanto es seguro que el caminante regresa.

6. Cálculo de P_l en tres dimensiones.

Vamos a ver que este caso es diferente. Si planteamos la ecuación:

$$\int_{l_0}^l p_l dl = \frac{3}{\pi^{3/2}} \int_{l_0}^l l^{-3/2} dl = C(1/\sqrt{l} - 1/\sqrt{l_0}),$$

de manera que la ecuación diferencial tiene la solución:

$$-\log \frac{1 - P_l}{1 - P_0} = C(1/\sqrt{l} - 1/\sqrt{l_0}) \Rightarrow 1 - P_l = (1 - P_0)e^{-C(1/\sqrt{l} - 1/\sqrt{l_0})}.$$

Ahora podemos observar que cuando $l \rightarrow \infty$, $1 - P_l$ tiende a una constante, por lo tanto no es seguro que el caminante regrese a su origen.