Expansión a bajas temperaturas del modelo de Potts

Juan José Gómez Navarro

13 de junio de 2005

1. Introducción

El objetivo es construir la función de partición del modelo de Potts. sta viene dada por

$$z = \sum_{\text{conf}} e^{-\beta H}$$

donde H es el hamiltoniano, definido a su vez por

$$H = -J \sum_{<ij>} \delta(\sigma_i, \sigma_j),$$

donde $\sigma_i = 1, 2, \ldots, q$. De esta manera, la función de partición es

$$z = \prod_{<ij>} e^{J\beta\delta(\sigma_i,\sigma_j)}.$$

Resolveremos el modelo en una red cuadrada bidimensional.

2. Bajas temperaturas

El estado fundamental es en el que todos los elementos están en el mismo estado. La energía es

$$H_0 = -JN\gamma/2$$

con $\gamma = 4$. Este estado está degenerado q veces. El primer estado excitado es cuando sólo uno de los elementos de la red es diferente al resto. Este estado tiene la energía del estado fundamental más $4J$, que corresponde a romper los enlaces de este elemento. La degeneración de este estado es debida a la posición más la elección del estado σ_i.. El primero produce N estados posibles, ya que la perturbación puede estar en cualquiera de los sitios de la red, el segundo un producto $q(q-1)$ de elegir las dos polaridades diferentes

El segundo estado excitado es cuando hay dos elemento iguales juntos y el resto diferente a Éstos. La energía de este sitio es $6J$ más que la del estado fundamental. La degeneración es la misma que la anterior pero doble, debido a que la pareja puede estar horientada vertical u horizontalmente.

El siguiente estado es cuando hay una inmensa mayoría de elementos en un mismo estado y dos elementos diferentes a los demás y entre sí estando juntos.

En este caso se rompen 7 enlaces y la degereración es $2Nq(q-1)(q-2)$. $2N$ debido a poder elegir la posición y orientación del cluster, q por elegir al primer elemento, $(q-1)$ el siguiente y $(q-2)$ el resto.

Por último, los estados con 8 enlaces rotos tiene una gran degeneración. Puede haber una fila de tres elementos iguales, con degeneración $2Nq(q-1)$, tres elentos en forma de L, en cuyo caso la degeneración es $4Nq(q-1)$ y un cuadrado con 4 elementos iguales con degeneración $Nq(q-1)$. Además puede haber dos elementos separados, que da lugar a dos grupos de degeneración. Estudiemos primero el caso en que los elementos son iguales, digamos q' rodeados de todos los demás en valor q. Es fácil comprobar que la energía de esta configuración es $H_0 + 8J$. La degeneración de este estado es $N(N-5)/2$ debido a que podemos poner el primer elemento en calquier lugar mientras que el segundo ha de estar en cualquiera menos en los 5 que forman el primero y sus 4 próximos vecinos; esto hay que multiplicarlo por $q(q-1)$, correspondiente a elegir cualquier valor de la configuración para q. Otro caso posible es que en los dos elementos sean diferentes q' y q'', rodeados de los demás con valor q. La degeneración es debida a la posición es $N(N-5)/2$ como antes más la debida a la elección de los estados que como tengo que elegir tres, será $q(q-1)(q-2)$. La degeneración será en total $7Nq(q-1) + \frac{N(N-5)}{2}(q-1^2)$.

No consideraremos más términos de la serie. Podemos ordenar en una tabla los estados con su energía y el número de estados copatibles con esa energía.

Estado	Energía	Degeneración
fundamental	$H_0 = -JN\gamma/2$	q
primero	$H_1 = H_0 + 4J$	$Nq(q-1)$
segundo	$H_2 = H_0 + 6J$	$2Nq(q-1)$
tercero	$H_3 = H_0 + 7J$	$2Nq(q-1)(q-2)$
cuarto	$H_4 = H_0 + 8J$	$7Nq(q-1) + \frac{N(N-5)}{2}q(q-1^2)$

La función de partición podemos pues expresarla como:

$$z = qe^{\frac{JN\gamma}{2}} \left\{ 1 + N(q-1)e^{-4j} + 2N(q-1)e^{-6J+} + 2N(q-1)(q-2)e^{-7J} + \right.$$
$$\left. +[7N(q-1) + \frac{N(N-5)}{2}(q-1)^2]e^{-8J} + \cdots \right\}$$