Renormalización de Percolación de sitios en una red cuadrada

Juan José Gómez Navarro

June 8, 2005

1 Aproximación para renormalizar.

Para poder renormalizar, sustituimos los clusters de 4 elementos por uno sólo. Estudiaremos la percolación de sitios negros. El criterio para elegir cuando un cluster se sustituye por un punto blanco o negro es como indica la figura:

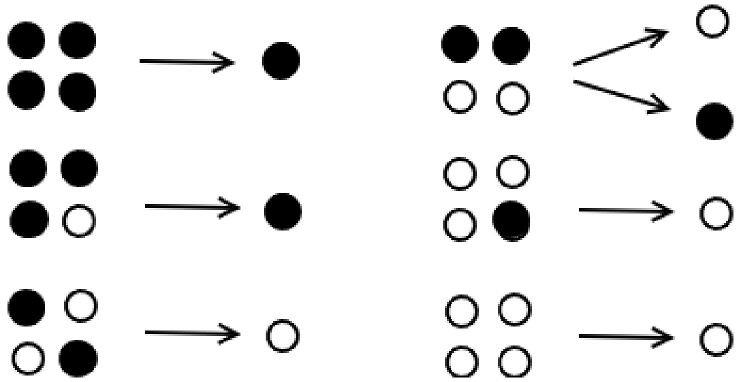

Figura 1: Criterio aproximado para obtener renormalización.

Denominamos p la probabilidad de tener un sitio de color negro en la red original. En la nueva red renormalizada, esta probabilidad se denomina p' que queremos obtener en función de p. Sólo contribuyen a p' las configuraciones que dan lugar a puntos negros. La configuración con todos lo puntos negros es obviametne negra y sólo hay una combinación posible. La que tiene tres negros la aproximamos por un punto negro teniendo en mente que esto supone una aproximación y que en este caso hay 4 conbinaciones posibles. Como vemos hay dos configuraciones con dos puntos de cada color. La que tiene los puntos del mismo color en esquinas opuestas no está percolada y por tanto la sustituimos por un punto no percolado. La que tiene los puntos alineados tiene 4 permutaciones posibles, pero sólo consideraremos dos, ya que hay igual probabilidad de percolar con puntos blanco que negros, y son éstos ltimos los que nos interesan. Por ltimo, las otras dos configuraciones las tomamos por no percoladas, una de ellas es una aproximación, mientras que la que tiene todos los puntos blancos es exacta.

De todos estos argumentos se infiere que la probabilidad renormalizada es la suma:

$$p' = p^4 + 4(1-p)p^3 + 2p^2(1-p)^2.$$

2 Puntos fijos.

Con la ecuación anterior podemos obtener los puntos fijos, que da lugar al punto crítico. Los puntos fijos son

$$\begin{cases} p = 0 \\ p = 1 \\ p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

Figura 2: Diagrama de puntos fijos.

Los casos $p = 0$ y $p = 1$ son evidentes, se trata de el sistema totalmente lleno de puntos blancos o negros y renormalizar no cambia nada. El otro punto es el que buscamos, la probabilidad crítica.

$$\boxed{P_c = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.681}$$

El resultado exacto es $p_c = 0.59$, de manera que el resultado está bastante bien logrado, teniendo en cuenta que el cálculo exacto es muy complicado de obtener.

3 Exponente crítico.

Vamos a obtener el coeficiente crítico ν de la expresión

$$\xi = |p - p_c|^{-\nu}$$

donde ξ es el tamaño promedio de los cluster. Esta expresión sólo es válida cuando estamos muy cerca del punto crítico. Análogamente, en la matriz renormalizada se tiene $\xi' = |p' - p_c|^{-\nu}$ y la relación con la anterior es

$$\xi' = \xi\, b.$$

b es el coeficiente que relaciona el tamaño de la matriz original y renormalizada. En este caso es fácil ver que el valor de este parámetro es $1/2$. Juntando las tres expresiones anteriores obtenemos:

$$\xi' = |p' - p_c|^{-\nu} = \frac{1}{2}|p - p_c|^{-\nu}.$$

Suponiendo que estamos arbitrariamente cerca del punto crítico desarollamos en serie de Taylor

$$p' - p_c = \frac{\partial p'}{\partial p}(p - p_c)$$

Si denotamos $\frac{\partial p'}{\partial p}(p_c) = \lambda = 1.53$, despejando en la ecuación para ν tomando logaritmos encontramos finalmente:

$$\boxed{\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda} = 1.63}$$