

# La paradoja del gato de Schrödinger

Juan José Gómez Navarro, Ontureño ;)

6 de febrero de 2006

## Resumen

Este documento trata de esclarecer a los curiosos de las paradojas los entresijos de una de las paradojas más famosas de la física, la paradoja del gato de Schrödinger. Nace a partir de una discusión iniciada en los foros de Migui (foro.migui.com), que me animó a crear este documento para introducir un poco el tema a los más curiosos. Espero que os resulte amena y sobre todo esclarecedora su lectura. Para cualquier aclaración puedes mandarme un mensaje a mi dirección de correo juan-jo.gomeznararro@gmail.com.

Creo que puedo decir sin miedo a equivocarme que nadie entiende la Mecánica Cuántica. Richard Feynman

A pesar de su desconcertante formulación y de la extraña versión que proporciona de la realidad, la mecánica cuántica nunca ha fallado en una prueba experimental. Es extraordinariamente fiable aunque no transparentemente comprensible. Probablemente sea cierto que "nadie entiende la Mecánica Cuántica", aunque es igualmente cierto que, de alguna maravillosa manera, la Mecánica Cuántica entiende al Universo. Eugene Hecht

## 1. ¿Por qué es importante?.

El objetivo principal de esta paradoja es mostrar las diferencias irreconciliables entre la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica. Como quizá sabrás, la Mecánica Clásica es la que estableció Newton <sup>1</sup> y estuvo en vigor como forma única de describir la naturaleza hasta principios del siglo XX. No obstante, a principios de siglo aparecieron una serie de experiencias que no pudieron ser explicadas con esta mecánica. Aparecieron diferentes formas de interpretar estos resultados con el consiguiente "pique" entre escuelas. Un fruto de esta controversia fué esta paradoja, que pone sobre la mesa las dramáticas diferencias entre las dos formas de pensar, de las cuales por supuesto sólo una de ellas podría llegar a resultar aceptada universalmente.

---

<sup>1</sup>Después de Newton se plantearon nuevas formas de describir la física, como la mecánica de Hamilton, de Lagrange, e incluso una formulación mediante el sólo uso de los corchetes de Poisson, si bien todas estas formas de entender la física eran totalmente equivalentes a la de Newton.

## 2. El pobre minino.

El siguiente es un experimento mental, muy usado por Einstein y sus contemporáneos para intentar demostrarse los unos a los otros que sus argumentos eran erróneos. Supongamos que introducimos una ampolla con cianuro dentro de un gato (por ejemplo se la damos de comer dentro de sobrasada). La ampolla es muy frágil y puede romperse si es golpeada por partículas radiactivas. Al lado del minino ponemos una pequeña fuente radiactiva (Uranio, Radio,... lo que sea) que emite partículas subatómicas (pongamos por caso partículas alfa) que podrían perfectamente atravesar la piel del gato para golpear la ampolla, romperla y producir la consiguiente desgracia para el pobre gato. Supongamos ahora que dejamos al gato, con la fuente al lado, dentro de una caja negra. Lo encerramos e intentamos entender físicamente cual será la suerte del animal. Si analizamos el problema con las ideas clásicas o con las nuevas ideas que surgieron en la época encontraremos dos explicaciones muy diferentes del fenómeno, que conforman la paradoja. Por supuesto la paradoja no existe, ya que sólo una solución es posible al problema.

## 3. Einstein pensando en voz alta

Einstein era un físico clásico moderno. Con esto quiero decir que era muy consciente de la naturaleza corpuscular de la materia e incluso la luz<sup>2</sup>. Sin embargo rechazaba la interpretación probabilística de Born de la mecánica cuántica. Para Einstein el universo era determinista, "Dios no juega a los dados", decía. Según él, el gato mas la ampolla mas la fuente de dentro de la caja es un sistema cerrado que debía seguir unas leyes físicas muy claras. Por supuesto el gato (sus partículas) siguen estas leyes por tanto la suerte del gato está echada por las condiciones iniciales y el papel de un posible observador es nulo. Según esto, el gato muere o no independientemente del exterior. El papel del físico es resolver el sistema de ecuaciones que salen de imponer una serie de leyes físicas mas las condiciones iniciales. La solución de estas ecuaciones darán la suerte exacta del gato sin necesidad de abrir la caja. En la práctica, el sistema tiene tantas partículas que no es resoluble exáctamente, tenemos que acudir al concepto de probabilidad. Podríamos estimar la probabilidad de que el gato muera, por ejemplo, teniendo en cuenta la actividad de la muestra radiactiva, el ángulo sólido que abarca la ampolla respecto a la fuente, estimando la fragilidad del contenedor del veneno para las partículas... De esta manera, la solución práctica es puramente probabilística. Ahora bien, es importante darse cuenta de una cosa: la probabilidad la hemos usado debido a la incapacidad práctica de resolver el problema, sin embargo sabemos que hay una solución precisa aunque desconocida. Esta distinción es importante, la repetiré en letra grande:

**el que acudamos a la probabilidad es un acto de cobardía, no podemos resolver el problema exaátamente, así que sólo podemos estimar la solución. Sin embargo, si tuviésemos un ordenador suficientemente potente encontraríamos la solución, que formalmente sabemos que existe.**

---

<sup>2</sup>Decir esto es quedarse corto. Einstein, mediante sus trabajos sobre efecto fotoeléctrico y movimiento Browniano prácticamente descubrió la naturaleza corpuscular de todo.

## 4. La Cuántica se hace su aparición

Toda la historia del gato no es más que un cuentecito para conseguir un propósito: llevar un efecto microscópico al mundo macroscópico para que nos quedemos un tanto impresionados. La vida del gato está ligada al comportamiento de una partícula microscópica, que sabemos que no sigue las leyes habituales. Esto brinda la oportunidad de estudiar la vida del gato desde la Mecánica Cuántica, que es lo que voy a hacer ahora.

La mecánica cuántica tiene unos postulados muy claros. La aceptación de éstos es meramente axiomática, su validez o no será juzgada por su utilidad para explicar el mundo que nos rodea. Digo esto para los que no estéis acostumbrados a esta materia, ya que usaré cosas que preguntaráis ¿y por qué eso es así?, la respuesta es ¿y por qué no?.

### 4.1. Negación

En cuántica, el estado del gato está dado por un vector en un determinado espacio vectorial (esta es una de esas cosas que te tienes que creer de forma axiomática). El que el gato esté vivo es un estado, el que esté muerto es otro. En general, cuando está dentro de la caja negra y no lo vemos, el estado es una combinación lineal de estos estados. No podemos decir que el gato está vivo ni muerto. No hay forma de saberlo, a no ser que levantemos la tapa. Pero otro importante postulado de la cuántica es que la medida filtra el estado del sistema (éste también te lo tienes que tragar). Esto quiere decir que cuando mires, estás midiendo su estado de vida y el resultado de esta medida es vivo o muerto.

¿Entonces que pasa con el gato antes de abrir la caja? ¿estaba vivo o no?, te preguntará. Esa pregunta no tiene sentido hacerla hasta después de haber medido. Si el gato está muerto, ha sido nuestra mirada la que lo ha matado al filtrar el estado del sistema, pasando de una combinación de vida-muerte a una muerte pura. Lo mismo si el gato está vivo. La cuántica nos dice que el estado del sistema sólo puede ser obtenido mediante medidas, pero éstas modifican dramáticamente el estado de lo que queríamos medir, por tanto nuestra medida está cargada de incertidumbre. Si para conocer el estado de algo hay que perturbarlo en el momento de la medida, ¿cómo podemos saber que habría hecho si no hubiéramos intervenido?. La respuesta es frustrante: no se puede.

Bueno, si es la primera vez que te enfrentas a los postulados de la MC<sup>3</sup> y eres un ser humano normal, estarás descontento. Pensarás que no puede ser, que la perturbación de mirar al gato no es tan fuerte, que tú no tienes láseres en los ojos. Pensarás que el gato no está en el limbo, está o vivo o muerto. Pensarás que esto es un cuento chino para llegar a donde antes, es decir a renunciar al conocimiento preciso debido a la imposibilidad práctica de resolver el problema exáctamente y terminar así hablando de probabilidades, que es un truco para ganar tiempo ya que todavía no han resuelto este problema. Si eres obstinado incluso creerás que tú sí lo vas a resolver. No te preocupes, en el aprendizaje de la cuántica el primer paso es la negación, es algo normal. Esto es lo que alimenta el mito de que nadie entiende la cuántica, cuando eso no es cierto. Uno se acostumbra a pensar en estos términos y al final no es tan sorprendente.

---

<sup>3</sup>se suele siglar así normalmente a la mecánica cuántica en los libros

## 4.2. Duda

Yo pienso que la cuántica tiene un problema con la divulgación: no se puede aprender nada de ella sin haber echado algunas cuentas. No me gusta que los argumentos sean fórmulas, denotan poca capacidad de síntesis del locutor, pero es que si no hablo de fórmulas es imposible entender este problema en su profundidad. Para leer lo que sigue se requiere un mínimo bagaje en álgebra. Lo siento, pero nadie dijo que la cuántica fuera fácil.

Necesitaré "sólo" tres cosas para analizar en profundidad el problema.

- Espacio de estados:

Como he dicho antes, en MC el estado de un sistema está dado por un vector (que se denomina ket en la jerga), que se escribe con la extraña nomenclatura:<sup>4</sup>

$$|\psi\rangle$$

Este vector, pertenece a un espacio vectorial, que tiene una base ortonormal que llamaremos  $\{|n\rangle\}$  donde  $n$  es un índice que recorre desde 1 hasta la dimensión del espacio. Por tanto, el vector estado en esa base queda escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{dim} \langle n|\psi\rangle |n\rangle$$

donde  $\langle n|\psi\rangle$  no es más que la nomenclatura para el producto escalar de los vectores  $|\psi\rangle$  y  $|n\rangle$ .

- Medidas:

Otro postulado es que si queremos saber el valor de alguna magnitud de la partícula en ese estado le tenemos que aplicar un operador apropiado, típicamente una matriz, cuyo resultado al actuar sobre el vector es otro vector o combinación lineal de éstos:

$$A|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{dim} \langle n|\psi\rangle A|n\rangle.$$

Sabiendo cómo actúa el observable  $A$  sobre los estados de la base, conoceremos la actuación sobre los demás estados posibles, esto es como en álgebra elemental.

- Evolución temporal del sistema:

Supongamos que el estado inicial es  $|\psi t_0\rangle$ . En un tiempo posterior  $t$ , el estado ha evolucionado en otro:

$$|\psi, t\rangle = U(t - t_0)|\psi t_0\rangle$$

donde  $U(t - t_0)$  es un operador llamado evolución temporal y que depende de las características del sistema. Esencialmente ésta es la ecuación de movimiento análoga a la segunda ley de Newton. Esta afirmación no

---

<sup>4</sup>la nomenclatura de ket y bra no es ni mucho menos arbitraria. Se la debemos a Dirac, premio nobel por sus grandes aportaciones al desarrollo de la cuántica. Una de sus aportaciones es esta nomenclatura, y el nobel no lo dan por nada.

es un postulado, sino que tiene una demostración basada, eso sí, en argumentos muy generales y está íntimamente relacionada con la ecuación de Schrödinger<sup>5</sup>.

Ya tengo todo lo que necesito, ahora remanguémonos y pasemos a estudiar el pobre minino.

Lo primero es definir el espacio de estados. En este caso es un espacio de dos dimensiones, los elementos de la base son justamente los estados **vivo** y **muerto**, que denotaremos por  $|v\rangle$  y  $|m\rangle$  y que son autovectores del observable estado de vida (que denotaré por  $V$ ), con autovalores  $+1$  y  $-1$  respectivamente. Esto se escribe en el lenguaje vectorial como

$$\begin{aligned} V|v\rangle &= +1|v\rangle \\ V|m\rangle &= -1|m\rangle. \end{aligned}$$

Ahora usaremos la ecuación de evolución temporal del gato. En el momento de meter el gato en la caja está vivo, de manera en  $t_0$  el estado es  $|\psi_{t_0}\rangle$ :

$$|\psi_{t_0}\rangle = |v\rangle.$$

En un momento posterior  $t$ , el gato está en un estado dado por

$$|\psi, t\rangle = \langle v|\psi, t\rangle|v\rangle + \langle m|\psi, t\rangle|m\rangle$$

donde he introducido la resolución de la identidad (si no entiendes esto, pues créeme que sólo es una cuestión matemática). Estudiemos los productos escalares que aparecen, ahora usaré lo que he comentado de la evolución temporal.

$$\langle v|\psi, t\rangle = \langle v|U(t - t_0)|\psi_{t_0}\rangle = \langle v|U(t - t_0)|v\rangle = C_v(t)$$

$$\langle m|\psi, t\rangle = \langle m|U(t - t_0)|\psi_{t_0}\rangle = \langle m|U(t - t_0)|v\rangle = C_m(t)$$

Donde  $C_v(t)$  y  $C_m(t)$  son funciones complejas del tiempo que no conocemos ahora mismo. Aplicando esto, tenemos que el estado del gato en función del tiempo es

$$|\psi, t\rangle = C_v(t)|v\rangle + C_m(t)|m\rangle$$

Ya ha terminado la parte pesada, ahora ya sabemos el estado del gato, veamos lo que nos es capaz de decir la cuántica en concreto. Como esto es un experimento mental, supongamos que somos capaces de resolver el problema exactamente, que por ejemplo tenemos un super ordenador que calcule lo que necesitamos o que Dios nos chiva la solución exacta del problema. En cuántica, obtener la solución exacta significa calcular las funciones  $C_v(t)$  y  $C_m(t)$  así que supongamos que las conocemos. Ahora nos podemos preguntar por el estado del gato, para ello tenemos que aplicar el operador estado de vida al estado evolucionado temporal y ver lo que pasa:

$$V|\psi, t\rangle = C_v(t)V|v\rangle + C_m(t)V|m\rangle = C_v(t)|v\rangle - C_m(t)|m\rangle \neq cte |\psi, t\rangle$$

Vaya, el estado del gato no es autovector del operador "estado de vida" ello implica que no está claro el estado de vida del gato. Bueno, hasta aquí quería llegar.

<sup>5</sup>La ec. de Schrödinger se puede escribir en forma abstracta como  $i\hbar \frac{dU}{dt} = HU$  donde  $H$  es el hamiltoniano

Como el estado del gato después de meterlo dentro de la caja no es autoestado del operador que mide la vida, no podemos asegurar su estado de vida, sólo podremos calcular la probabilidad<sup>6</sup> de que esté en uno de los dos estados. Ojo, hay que recordar que conocemos la solución exacta al problema, que alguien superior nos la dijo. Pero ni por esas sabemos si el gato está vivo o muerto. La incertidumbre es inevitable, está embebida en la teoría, forma parte de la naturaleza y es independiente de nuestra capacidad para resolver ecuaciones.

Vale, quizá no hayas seguido toda la argumentación, sin embargo repasemos los pasos para obtener la solución:

1. Acepto unos postulados y teoremas que son demostrables con éstos.
2. Aplico un poquito de álgebra.
3. Mido y veo que no soy capaz de saber el estado del gato con certeza.

Aquí es cuando empezará a dudar. La solución es extraña, antiintuitiva, ¿dónde demonios está el gato?. Sin embargo sabes que las matemáticas no fallan, ¿qué puede estar mal?. El único punto débil de la argumentación es la utilización de los postulados, sin embargo trataré de convencerte de que de hecho, éstos hacen su trabajo.

### 4.3. Resignación

Parece que la cuántica nos juega malas pasadas. Si has seguido un poco mis argumentos y eres un poco incisivo te deberías preguntar: *¿De qué sirve entonces la cuántica? Es decir, si en el mejor de los casos sólo habla de probabilidades no sirve para mucho. Para dar una probabilidad ya tenemos la clásica. O mejor lo calculo a ojo y me ahorro resolver ecuaciones, al fin y al cabo sólo es una mera probabilidad. El objetivo de la física de predecir el mundo está perdido.*

Si crees eso (vamos, yo lo creía cuando estaba en mi etapa de duda) es que no has entendido de qué va la física. La física va de hacer predicciones y luego comprobarlas experimentalmente. Como sabrás, las medidas del laboratorio no son números, sino intervalos de probabilidad. Das el valor medio de la magnitud y un intervalo en el que cae la medida con el 95 % de probabilidad: eso es medir, eso es la física.

Supongamos que queremos poner a prueba la solución cuántica de la paradoja de Schrödinger que nos dio ese ente superior y ya de paso comprobar la fiabilidad de los postulados (que era el único punto débil). Pues no tenemos más remedio que meter miles de gatos en cajas idénticas con idénticas muestras radiactivas, luego abrimos las cajas en el instante  $t$  y anotamos si el gato está muerto o vivo. Si el gato está vivo vale un 1, si está muerto un  $-1$ . Hacemos la media de estos números y ése es resultado experimental de la paradoja.

---

<sup>6</sup>la probabilidad de que el gato esté vivo es simplemente  $|C_v(t)|^2$  y de que esté muerto  $|C_m(t)|^2$ . Obviamente  $|C_v(t)|^2 + |C_m(t)|^2 = 1$ .

Ahora regresemos a la predicción de la cuántica. El valor medio que nos da la teoría para este valor en el instante  $t$  es <sup>7</sup>

$$\langle \psi, t | V | \psi, t \rangle = |C_v(t)|^2 - |C_m(t)|^2$$

que es un número dado, el que sea, pongamos que vale 0,02345. Pues ahora simplemente comparemos resultados. Si el valor medio del experimento coincide con el valor teórico que acabo de obtener, la cuántica gana, en caso contrario habría que buscar otro marco teórico.

## 5. Conclusión

Bueno, no creo que sea necesario decir que de hecho experimentos como éste (pero sin gatos, con átomos y estados de sus electrones) se han llevado y se llevan a cado diariamente en laboratorios de todo mundo y que en todos ellos la Mecánica Cuántica se ha revelado muy útil.

Probablemente sigas pensando ¿y la mirada del gato?. Si eso te causa problemas piensa en un experimento más sencillo que contenga el mismo problema de indeterminación. Por ejemplo imagina un átomo de hidrógeno, en el que el electrón puede estar en el estado fundamental o el primer estado excitado. Si aplicamos un campo eléctrico externo ¿dónde estará el electrón? ¿en qué estado estará el electrón?. La respuesta, como en el caso del gato, es que es imposible saberlo hasta el momento de medir la energía. Eso es lo que pretende transmitir la paradoja, no la vida o muerte del gato, que eso sólo es literatura.

Quizá resulte extraña cuando se saca de contexto como es el caso de la paradoja que nos ocupa, pero es un hecho que funciona perfectamente y combinada con la relatividad es el paradigma que se usa en la actualidad para predecir colisiones en aceleradores de partículas, con una precisión<sup>8</sup> en las predicciones sin precedentes en la historia de la ciencia.

Se puede decir que la Mecánica Cuántica se ha llevado "el gato" al agua ;).

---

<sup>7</sup>es agradable ver como al menos la teoría es consistente. El valor medio de la vida, tal como se ha definido el observable  $V$ , ha de estar entre  $-1$  y  $1$ . Efectivamente uno puede comprobar que  $||C_v|^2 - |C_m|^2| \leq 1$

<sup>8</sup>se alcanzan precisiones de 11 cifras decimales